2. *Абушов О.Г., Лапин А.В.* Решение задачи фильтрации в плотине методом оптимизации формы области: сеточная аппроксимация // Изв. вузов. Математика. – 1996. – N 9. – С. 3-13.

3. *Хаслингер Я., Нейтаанмяки П.* Конечно-элементная аппроксимация для оптимального проектирования формы: теория и приложения. М.: Мир, 1992. – 386 с.

К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКОМ НЕРАВНОВЕСНО ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ГАЗА

Бильченко Н.Г.

Казанский государственный технический университет

В 1960 г. А.А.Дородницын предложил обобщенный метод интегральных соотношений и применил его к решению уравнений пограничного слоя [1]. Особенностью этого метода является то, что он позволяет быстро получить решение задачи на ПЭВМ с необходимой степенью точности. Несмотря на то, что он требует большой предварительной работы по составлению системы аппроксимирующих обыкновенных дифференциальных уравнений, этот метод получил широкое распространение в инженерной практике при расчете аэродинамических характеристик плоских и осесимметричных потоков сжимаемого газа [2,3,4] и трехмерного пограничного слоя [5].

В настоящей работе дается вывод интегральных соотношений для системы уравнений ламинарного пограничного слоя неравновесно диссоциирующего воздуха на проницаемой цилиндрической поверхности, а также приводится аппроксимирующая система третьего приближения для рассматриваемого случая.

1. Вывод интегральных соотношений. Система уравнений, описывающая случай неравновесной диссоциации, имеет вид [6]:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0,$$

$$\rho u\frac{\partial C_A}{\partial x}+\rho v\frac{\partial C_A}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12}\frac{\partial C_A}{\partial y}\right)+W_A,$$

$$\rho u\frac{\partial H}{\partial x}+\rho v\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial H}{\partial y}+\mu\left(1-\frac{1}{Pr}\right)u\frac{\partial u}{\partial y}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{1}{Le}-1\right)\rho D_{12}\left(h_A-h_M\right)\frac{\partial C_A}{\partial y}\right),$$

$$p_e=\rho\tilde{R}T,\quad \tilde{R}=\frac{k}{2m_A}\left(1+C_A\right). \qquad (1)$$

Здесь ось x направлена по касательной к контуру, ось y – по внешней нормали; u, v – проекции вектора скорости на координатные оси; ρ – плотность; p – давление; μ – вязкость; C_A – массовая концентрация атомов (степень диссоциации); D_{12} – коэффициент бинарной диффузии; W_A – скорость массообмена атомарного компонента на единицу объема; Pr – число Прандтля; Le – число Льюиса; $H = h + u^2/2$ – полная энтальпия; $h_i = \int_0^T C_{p_i} dT + h_i^0$ – энтальпия компонента смеси; h_i^0 – энтальпия образования i-го компонента ($i = A, M$ – индексы соответственно атомарного и молекулярного компонента), k – постоянная Больцмана, m_A – масса атома.

В дальнейшем рассматривается случай "замороженного" газа, для которого $W_A \equiv 0$. Граничные условия к системе (1) следующие:

$$u=0,\quad v=\left(\frac{m}{\rho}\right)_w,\quad H=H_w,\quad C_A=0\quad \text{(каталитическая стенка)},$$

$$\left(\frac{\partial C_A}{\partial y}\right)_w=0\quad \text{(некаталитическая стенка)},\quad (y=0,\quad x>0),$$

$$u=U_e,\quad H=H_e,\quad C_A=C_{Ae},\quad (y\to\infty),$$

$$u=U_0,\quad H=H_0,\quad C_A=C_{A0},\quad (x=0,\quad y>0). \qquad (2)$$

Здесь $m_w = (\rho v)_w$ – массовый расход вдуваемого газа (того же состава, что и в набегающем потоке) через единицу поверхности в единицу времени; $e, w, 0$ – индексы параметров потока на внешней границе пограничного слоя, на стенке и в точке торможения соответственно.

Наиболее интересным представляется рассмотрение случая некаталитической стенки. При обтекании поверхности высокотемпературным химически замороженным потоком теплообмен будет определяться состоянием поверхности, так как химические реакции могут проходить только на поверхности тела вследствие ее каталитического действия.

Для каталитической поверхности не наблюдается заметного изменения теплового потока к поверхности. Если же стенка некаталитическая (например, из некоторых стекловидных материалов и углепластиков), то может быть достигнуто значительное снижение величины теплового потока. Оно обусловлено образованием около стенки слоя нерекомбинированных атомов, препятствующих диффузии легких частиц к поверхности, вследствие чего уменьшается диффузионный перенос тепла к стенке и, значит, уменьшается тепловой поток.

Величина теплового потока, поступающего от пограничного слоя к обтекаемой поверхности единичной ширины, имеет вид

$$Q = \int_0^{x_k} q_w dx, \tag{3}$$

где q_w – удельный тепловой поток к стенке от ламинарного пограничного слоя идеально диссоциирующего газа, определяемый теплопроводностью и диффузионным переносом тепла [6]:

$$-q_w = \left(\frac{\lambda}{c_p}\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\rho D_{12} h_A^0 \frac{\partial C_A}{\partial y}\right)_{y=0};$$

λ – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость газа. С помощью преобразований А.А.Дородницына [7]

$$\xi = \frac{1}{p_{e0}}\int_0^x p_e dx, \quad \eta = \frac{1}{\rho_{e0}}\int_0^y \rho dy$$

система (1) приводится к виду

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} + w\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\tau}{\tau_e}U_e\frac{dU_e}{d\xi} + \nu_{e0}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0,$$

$$u\frac{\partial C_A}{\partial \xi} + w\frac{\partial C_A}{\partial \eta} = \frac{\nu_{e0}}{Sm}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)\frac{\partial C_A}{\partial \eta}\right),$$

$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = \frac{\nu_{e0}}{Pr}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right) + \nu_{e0}\left(1 - \frac{1}{Pr}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)\frac{\partial \alpha^2}{\partial \eta}\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{Le}\right)\frac{\nu_{e0}}{Sm}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)\left(\tau_A - \tau_M\right)\frac{\partial C_A}{\partial \eta}\right),$$

$$p_e = \frac{\rho k}{2m_A}\left(1 + C_A\right). \tag{4}$$

Здесь

$$w = \left(1 - \alpha_e^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} u\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\vartheta}{\tau}, \quad \vartheta = \tau + \alpha^2,$$

$$\tau_A = \frac{1}{h_{e0}}\int_0^T C_{p_A} dT, \quad \tau_M = \frac{1}{h_{e0}}\int_0^T C_{p_M} dT,$$

$$\alpha = \frac{u}{V_{max}}, \quad V_{max} = V_\infty\sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma - 1)M_\infty^2}},$$

γ – показатель адиабаты, Sm – число Шмидта. Граничные условия (2) в новых переменных примут вид

$$u = 0, \quad w = \frac{(\rho v)_w}{\rho_{e0}\left(1 - \alpha_e^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}}, \quad \vartheta = \vartheta_w, \quad \left(\frac{\partial C_A}{\partial\eta}\right)_w = 0, \quad (\eta = 0),$$

$$u \to U_e(\xi), \quad \vartheta \to 1, \quad C_A = C_{Ae}, \quad (\eta \to \infty),$$

$$u = U_e(0), \quad \vartheta = 1, \quad C_A = C_{A0}, \quad (\xi = 0, \quad \eta > 0). \tag{5}$$

С помощью преобразований [3]

$$\bar{u} = \frac{u}{U_e}, \quad \bar{v} = \frac{w}{U_e\sqrt{\nu_{e0}}}, \quad \psi = 1 - \vartheta, \quad \bar{C}_A = \frac{C_A}{C_{Ae}},$$

$$\bar{s} = \frac{1}{V_{max} l}\int_0^\xi U_e d\xi, \quad \bar{t} = \frac{U_e \eta}{\sqrt{V_{max} l \nu_{e0}}},$$

$$\bar{w} = \sqrt{V_{max} l}\,\bar{v} + \frac{\dot{U}_e \bar{t}\bar{u}}{U_e}$$

система (4) приводится к следующей форме:

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{s}} + \bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} = \beta(1 - \psi - \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(b(\tau)\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}\right),$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{s}} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}} = 0,$$

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{C}_A}{\partial\bar{s}} + \bar{w}\frac{\partial\bar{C}_A}{\partial\bar{t}} = \frac{1}{Sm}\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(b(\tau)\frac{\partial\bar{C}_A}{\partial\bar{t}}\right),$$

$$\bar{u}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{s}} + \bar{w}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(b(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}}\right) + \alpha_e^2\left(1 - \frac{1}{Pr}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(b(\tau)\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial\bar{t}}\right) +$$

$$+\frac{1}{Sm}\left(\frac{1}{Le}-1\right)\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(b(\tau)\left(\tau_A-\tau_M\right)\frac{\partial\bar{C}_A}{\partial\bar{t}}\right), \tag{6}$$

а граничные условия (5) принимают вид:

$$\bar{u}=0,\quad \bar{w}=\frac{m(\bar{s})}{q(\bar{s})},\quad \psi=1-\tau_w,\quad \frac{\partial\bar{C}_A}{\partial\bar{t}}=0,\quad (\bar{t}=0),$$

$$\bar{u}\to 1,\quad \psi\to 0,\quad \bar{C}_A\to 1,\quad (\bar{t}\to\infty),$$

$$\bar{u}=1,\quad \psi=0,\quad \bar{C}_A=1,\quad (\bar{s}=0,\quad \bar{t}>0), \tag{7}$$

где

$$m=\frac{(\rho v)_w}{\rho_{e0}}\sqrt{\frac{l}{V_{max}\nu_{e0}}},\quad q=\alpha_e\left(1-\alpha_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$\beta=\frac{\dot{\alpha}_e}{\alpha_e\left(1-\alpha_e^2\right)},\quad \alpha_e=\frac{U_e}{V_{max}},\quad \dot{\alpha}_e=\frac{d\alpha_e}{d\bar{s}},\quad \dot{U}_e=\frac{dU_e}{d\bar{s}},$$

l – некоторый характерный размер (например, радиус кругового цилиндра в случае обтекания цилиндра). В дальнейшем для простоты черточки над переменными $\bar{t},\bar{s},\bar{u},\bar{w}$ опустим.

Умножив первое из уравнений (6) на $f'(u)$, второе - на $f(u)$ и сложив их, получим

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(uf(u)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(wf(u)\right)=f'(u)\beta(1-\psi-u^2)+$$

$$+f'(u)\frac{\partial}{\partial t}\left(b(\tau)\frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{8}$$

Предполагая, что $f(u)$ – дважды дифференцируемая и достаточно быстро стремящаяся к нулю функция, проинтегрируем уравнение (8) по s от 0 до ∞ и получим первое интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty uf(u)dt-w(s,0)f(0)=\beta\int_0^\infty(1-\psi-u^2)f'(u)dt-$$

$$-f'(0)b(\tau_w)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}-\int_0^\infty b(\tau)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 f''(u)dt. \tag{9}$$

Умножив первое уравнение (6) на $C_Af'(u)$, второе – на $C_Af(u)$, третье – на $f(u)$ и сложив, результат проинтегрируем по s от 0 до ∞. Тогда второе интегральное соотношение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty uf(u)C_Adt-w(s,0)f(0)C_{Aw}=\beta\int_0^\infty C_A(1-\psi-u^2)f'(u)dt-$$

$$-C_{Aw}f'(0)b(\tau_w)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}-\int_0^\infty b(\tau)\frac{\partial u}{\partial t}\left(f''(u)C_A\frac{\partial u}{\partial t}+f'(u)\frac{\partial C_A}{\partial t}\right)dt-$$
$$-\frac{1}{Sm}\int_0^\infty f'(u)b(\tau)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial C_A}{\partial t}dt. \qquad (10)$$

Для вывода третьего интегрального соотношения первое уравнение (6) умножим на $\psi f'(u)$, второе – на $\psi f(u)$, четвертое – на $f(u)$ и сложив, проинтегрируем по s от 0 до ∞:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty uf(u)\psi dt-w(s,0)f(0)\psi_w=\beta\int_0^\infty \psi(1-\psi-u^2)f'(u)dt-$$
$$-\psi_w f'(0)b(\tau_w)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}-\int_0^\infty b(\tau)\frac{\partial u}{\partial t}\left(f''(u)\psi\frac{\partial u}{\partial t}+f'(u)\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)dt-$$
$$-\frac{1}{Pr}f'(0)b(\tau_w)\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0}-\frac{1}{Pr}\int_0^\infty b(\tau)f'(u)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}dt-$$
$$-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{Pr}-1\right)\int_0^\infty b(\tau)uf'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dt-$$
$$-\frac{1}{Sm}\left(\frac{1}{Le}-1\right)\int_0^\infty f'(u)b(\tau)\left(\tau_A-\tau_M\right)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial C_A}{\partial t}dt. \qquad (11)$$

2. Построение аппроксимирующей системы третьего приближения. Введем обозначения

$$\theta=\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial t}},\quad \theta_0=\frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}},\quad \psi_w=\frac{\omega_0}{\theta_0},\quad \omega=\theta\psi,\quad \varphi=C_A\theta$$

и вспомогательные соотношения

$$\Omega=b\frac{\partial \psi}{\partial t}=b\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{b}{\theta}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega}{\theta}\right),$$
$$\Phi=b\frac{\partial C_A}{\partial t}=b\frac{\partial C_A}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{b}{\theta}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi}{\theta}\right),$$

с учетом которых интегральные соотношения (9)–(11) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 uf(u)\theta du-w(s,0)f(0)=\beta\int_0^1(1-u^2)f'(u)\theta du-$$
$$-\beta\int_0^1 f'(u)\omega du-\frac{f'(0)b_0}{\theta_0}-\int_0^1\frac{bf''(u)}{\theta}du,$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 uf(u)\varphi du-w(s,0)f(0)\frac{\varphi_0}{\theta_0}=\beta\int_0^1(1-u^2)f'(u)\varphi du-$$

$$-\beta\int_0^1 f'(u)\frac{\varphi\omega}{\theta}du-\frac{f'(0)b_0\varphi_0}{\theta_0^2}-$$

$$-\int_0^1 f''(u)\frac{b\varphi}{\theta^2}du-\left(\frac{1}{Sm}+1\right)\int_0^1 f'(u)\Phi du,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 uf(u)\omega du-w(s,0)f(0)\frac{\omega_0}{\theta_0}=\beta\int_0^1(1-u^2)f'(u)\omega du-$$

$$-\beta\int_0^1 f'(u)\frac{\omega^2}{\theta}du-\frac{f'(0)b_0\omega_0}{\theta_0^2}-\int_0^1 f''(u)\frac{b\omega}{\theta^2}du-\frac{1}{Pr}f(0)\Omega_0-$$

$$-\left(\frac{1}{Pr}+1\right)\int_0^1 f'(u)\Omega du-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{Pr}-1\right)\int_0^1 uf'(u)\frac{b}{\theta}du-$$

$$-\frac{1}{Sm}\left(\frac{1}{Le}-1\right)\int_0^1 B\Phi du. \qquad (12)$$

Получив, в соответствии с идеей метода, интерполяционные многочлены для третьего приближения в виде:

$$\theta=\frac{1}{1-u}\left(\theta_0+u\left(-\frac{9}{2}\theta_0+4\theta_1-\frac{1}{2}\theta_2\right)+u^2\left(\frac{9}{2}\theta_0-6\theta_1+\frac{3}{2}\theta_2\right)\right),$$

$$\omega=\omega_0+u\left(-\frac{9}{2}\omega_0+6\omega_1-\frac{3}{2}\omega_2\right)+u^2\left(\frac{9}{2}\omega_0-9\omega_1+\frac{9}{2}\omega_2\right),$$

$$\frac{b}{\theta}=(1-u)\left(\frac{b_0}{\theta_0}+u\left(-\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0}+9\frac{b_1}{\theta_1}-\frac{9}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right)+u^2\left(\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0}-\frac{27}{2}\frac{b_1}{\theta_1}+\frac{27}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right)\right),$$

$$\varphi=\frac{1}{1-u}\left(\varphi_0+u\left(-\frac{9}{2}\varphi_0+4\varphi_1-\frac{1}{2}\varphi_2\right)+u^2\left(\frac{9}{2}\varphi_0-6\varphi_1+\frac{3}{2}\varphi_2\right)\right),$$

$$\frac{\varphi\omega}{\theta}=\frac{\varphi_0\omega_0}{\theta_0}+u\left(-\frac{9}{2}\frac{\varphi_0\omega_0}{\theta_0}+6\frac{\varphi_1\omega_1}{\theta_1}-\frac{3}{2}\frac{\varphi_2\omega_2}{\theta_2}\right)+$$

$$+u^2\left(\frac{9}{2}\frac{\varphi_0\omega_0}{\theta_0}-9\frac{\varphi_1\omega_1}{\theta_1}+\frac{9}{2}\frac{\varphi_2\omega_2}{\theta_2}\right),$$

$$\frac{b\varphi}{\theta^2}=(1-u)\left(\frac{b_0\varphi_0}{\theta_0^2}+u\left(-\frac{9}{2}\frac{b_0\varphi_0}{\theta_0^2}+9\frac{b_1\varphi_1}{\theta_1^2}-\frac{9}{2}\frac{b_2\varphi_2}{\theta_2^2}\right)+\right.$$

$$\left.+u^2\left(\frac{9}{2}\frac{b_0\varphi_0}{\theta_0^2}-\frac{27}{2}\frac{b_1\varphi_1}{\theta_1^2}+\frac{27}{2}\frac{b_2\varphi_2}{\theta_2^2}\right)\right),$$

$$\Phi=2u(1-u)\left(1-\frac{\varphi_0}{\theta_0}\right)\left(\frac{b_0}{\theta_0}+u\left(-\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0}+9\frac{b_1}{\theta_1}-\frac{9}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right)+\right.$$

$$\left.+u^2\left(\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0}-\frac{27}{2}\frac{b_1}{\theta_1}+\frac{27}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right)\right),$$

$$\frac{\omega^2}{\theta} = (1-u)\left(\frac{\omega_0^2}{\theta_0} + u\left(-\frac{9}{2}\frac{\omega_0^2}{\theta_0} + 9\frac{\omega_1^2}{\theta_1} - \frac{9}{2}\frac{\omega_2^2}{\theta_2}\right) + \right.$$
$$\left. + u^2\left(\frac{9}{2}\frac{\omega_0^2}{\theta_0} - \frac{27}{2}\frac{\omega_1^2}{\theta_1} + \frac{27}{2}\frac{\omega_2^2}{\theta_2}\right)\right),$$
$$\frac{b\omega}{\theta^2} = (1-u)^2\left(\frac{b_0\omega_0}{\theta_0^2} + u\left(\frac{9}{2}\frac{b_0\omega_0}{\theta_0^2} - \frac{27}{2}\frac{b_1\omega_1}{\theta_1^2} + \frac{27}{2}\frac{b_2\omega_2}{\theta_2^2}\right) + \right.$$
$$\left. + u^2\left(\frac{9}{2}\frac{b_0\omega_0}{\theta_0^2} - \frac{81}{4}\frac{b_1\omega_1}{\theta_1^2} + \frac{81}{2}\frac{b_2\omega_2}{\theta_2^2}\right)\right),$$
$$\Omega = (1-u)\left(\Omega_0 + u\left(-\frac{9}{2}\Omega_0 + 9\Omega_1 - \frac{9}{2}\Omega_2\right) + u^2\left(\frac{9}{2}\Omega_0 - \frac{27}{2}\Omega_1 + \frac{27}{2}\Omega_2\right)\right),$$
$$\Omega_0 = \frac{b_0}{\theta_0}\left(-\frac{11}{2}\frac{\omega_0}{\theta_0} + 9\frac{\omega_1}{\theta_1} - \frac{9}{2}\frac{\omega_2}{\theta_2}\right),$$
$$\Omega_1 = \frac{b_1}{\theta_1}\left(-\frac{\omega_0}{\theta_0} - \frac{3}{2}\frac{\omega_1}{\theta_1} + 3\frac{\omega_2}{\theta_2}\right),$$
$$\Omega_2 = \frac{b_2}{\theta_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\theta_0} - 3\frac{\omega_1}{\theta_1} + \frac{3}{2}\frac{\omega_2}{\theta_2}\right),$$
$$B\Phi = u(1-u)\left(u\left(27B_1\Phi_1 - \frac{27}{4}B_2\Phi_2\right) + u^2\left(-\frac{81}{2}B_1\Phi_1 + \frac{81}{4}B_2\Phi_2\right)\right),$$
$$\Phi_1 = 2u\left(1 - \frac{\varphi_0}{\theta_0}\right)\left(-\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0} + 9\frac{b_1}{\theta_1} - \frac{9}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$
$$\Phi_2 = 2u\left(1 - \frac{\varphi_0}{\theta_0}\right)\left(\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0} - \frac{27}{2}\frac{b_1}{\theta_1} + \frac{27}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$

подставим их в (12). С учетом (7) аппроксимирующая система в нормальной форме Коши относительно независимой переменной $\bar{x} = x/l$ примет вид (штрих обозначает дифференцирование по $\bar{x}$):

$$\theta_0' = \frac{2088}{49}m - \beta q\left(\frac{10859}{490}\theta_0 + \frac{920}{49}\theta_1 + \frac{277}{98}\theta_2\right) +$$
$$+\beta q\left(\frac{1467}{98}\omega_0 + \frac{1152}{49}\omega_1 + \frac{45}{98}\omega_2\right) + \frac{5085}{49}\frac{b_0 q}{\theta_0} - \frac{4266}{49}\frac{b_1 q}{\theta_1} - \frac{459}{49}\frac{b_2 q}{\theta_2},$$
$$\theta_1' = \frac{1002}{49}m - \beta q\left(\frac{10971}{980}\theta_0 + \frac{544}{49}\theta_1 + \frac{109}{196}\theta_2\right) +$$
$$+\beta q\left(\frac{1299}{196}\omega_0 + \frac{639}{49}\omega_1 + \frac{153}{196}\omega_2\right) + \frac{2406}{49}\frac{b_0 q}{\theta_0} - \frac{3699}{98}\frac{b_1 q}{\theta_1} - \frac{513}{49}\frac{b_2 q}{\theta_2},$$

$$\theta_2' = -\frac{216}{49}m - \beta q\left(-\frac{249}{98}\theta_0 - \frac{156}{49}\theta_1 + \frac{93}{98}\theta_2\right) +$$
$$+\beta q\left(-\frac{243}{98}\omega_0 - \frac{180}{49}\omega_1 + \frac{171}{98}\omega_2\right) - \frac{891}{49}\frac{b_0 q}{\theta_0} + \frac{1080}{49}\frac{b_1 q}{\theta_1} - \frac{135}{49}\frac{b_2 q}{\theta_2},$$
$$\varphi_0' = \frac{2088}{49}m\frac{\varphi_0}{\theta_0} - \beta q\left(\frac{10859}{490}\varphi_0 + \frac{920}{49}\varphi_1 + \frac{277}{98}\varphi_2\right) +$$
$$+\beta q\left(\frac{1467}{98}\frac{\varphi_0\omega_0}{\theta_0} + \frac{1152}{49}\frac{\varphi_1\omega_1}{\theta_1} + \frac{45}{98}\frac{\varphi_2\omega_2}{\theta_2}\right) + \frac{5085}{49}\frac{qb_0\varphi_0}{\theta_0^2} - \frac{4266}{49}\frac{qb_1\varphi_1}{\theta_1^2} -$$
$$-\frac{459}{49}\frac{qb_2\varphi_2}{\theta_2^2} + q\left(\frac{1}{Sm} + 1\right)\left(1 - \frac{\varphi_0}{\theta_0}\right)\left(-\frac{1692}{1715}\frac{b_0}{\theta_0} + \frac{86292}{17015}\frac{b_1}{\theta_1} - \frac{86292}{17015}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$
$$\varphi_1' = \frac{1002}{49}m\frac{\varphi_0}{\theta_0} - \beta q\left(\frac{10971}{980}\varphi_0 + \frac{544}{49}\varphi_1 + \frac{109}{196}\varphi_2\right) +$$
$$+\beta q\left(\frac{1299}{196}\frac{\varphi_0\omega_0}{\theta_0} + \frac{639}{49}\frac{\varphi_1\omega_1}{\theta_1} + \frac{153}{196}\frac{\varphi_2\omega_2}{\theta_2}\right) + \frac{2406}{49}\frac{qb_0\varphi_0}{\theta_0^2} - \frac{3699}{98}\frac{qb_1\varphi_1}{\theta_1^2} -$$
$$-\frac{513}{49}\frac{qb_2\varphi_2}{\theta_2^2} + q\left(\frac{1}{Sm} + 1\right)\left(1 - \frac{\varphi_0}{\theta_0}\right)\left(-\frac{594}{1715}\frac{b_0}{\theta_0} + \frac{30294}{17015}\frac{b_1}{\theta_1} - \frac{30294}{17015}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$
$$\varphi_2' = -\frac{216}{49}m\frac{\varphi_0}{\theta_0} - \beta q\left(-\frac{249}{98}\varphi_0 - \frac{156}{49}\varphi_1 + \frac{93}{98}\varphi_2\right) +$$
$$+\beta q\left(-\frac{243}{98}\frac{\varphi_0\omega_0}{\theta_0} - \frac{180}{49}\frac{\varphi_1\omega_1}{\theta_1} + \frac{171}{98}\frac{\varphi_2\omega_2}{\theta_2}\right) - \frac{891}{49}\frac{qb_0\varphi_0}{\theta_0^2} + \frac{1080}{49}\frac{qb_1\varphi_1}{\theta_1^2} -$$
$$-\frac{135}{49}\frac{qb_2\varphi_2}{\theta_2^2} + q\left(\frac{1}{Sm} + 1\right)\left(1 - \frac{\varphi_0}{\theta_0}\right)\left(\frac{108}{343}\frac{b_0}{\theta_0} - \frac{5508}{3403}\frac{b_1}{\theta_1} + \frac{5508}{3403}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$
$$\omega_0' = \theta_0'(1 - \tau_w),$$
$$\omega_1' = -\frac{2}{9}\omega_0' + \frac{100}{3}m\frac{\omega_0}{\theta_0} - \beta q\left(\frac{107}{9}\omega_0 + \frac{58}{3}\omega_1 - \frac{1}{3}\omega_2\right) +$$
$$+\beta q\left(\frac{100}{9}\frac{\omega_0^2}{\theta_0} - 8\frac{\omega_1^2}{\theta_1} + \frac{59}{2}\frac{\omega_2^2}{\theta_2}\right) - \frac{160}{9}\frac{qb_0\omega_0}{\theta_0^2} + \frac{471}{2}\frac{qb_1\omega_1}{\theta_1^2} - 312\frac{qb_2\omega_2}{\theta_2^2} -$$
$$-\frac{100}{3}\frac{q\Omega_0}{Pr} + q\left(\frac{1}{Pr} + 1\right)\left(\frac{100}{9}\Omega_0 - 8\Omega_1 + \frac{59}{2}\Omega_2\right) +$$
$$+q\alpha_e^2\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)\left(\frac{4}{3}\frac{b_0}{\theta_0} + 11\frac{b_1}{\theta_1} + 2\frac{b_2}{\theta_2}\right) +$$
$$+\frac{q}{Sm}\left(\frac{1}{Le} - 1\right)\left(\frac{33}{2}B_1\Phi_1 + \frac{3}{2}B_2\Phi_2\right),$$

$$\omega_2' = \frac{1}{9}\omega_0' - \frac{80}{3}m\frac{\omega_0}{\theta_0} - \beta q\left(-\frac{130}{9}\omega_0 - \frac{56}{3}\omega_1 + \frac{14}{3}\omega_2\right) +$$
$$+\beta q\left(-\frac{122}{9}\frac{\omega_0^2}{\theta_0} + 40\frac{\omega_1^2}{\theta_1} - 53\frac{\omega_2^2}{\theta_2}\right) + \frac{422}{9}\frac{qb_0\omega_0}{\theta_0^2} - 327\frac{qb_1\omega_1}{\theta_1^2} +$$
$$+426\frac{qb_2\omega_2}{\theta_2^2} + \frac{80}{3}\frac{q\Omega_0}{Pr} + q\left(\frac{1}{Pr} + 1\right)\left(-\frac{122}{9}\Omega_0 + 40\Omega_1 - 53\Omega_2\right) +$$
$$+q\alpha_e^2\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)\left(-\frac{16}{9}\frac{b_0}{\theta_0} - 10\frac{b_1}{\theta_1} + 8\frac{b_2}{\theta_2}\right) +$$
$$+\frac{q}{Sm}\left(\frac{1}{Le} - 1\right)(-15B_1\Phi_1 + 6B_2\Phi_2). \tag{13}$$

Начальные условия к системе (13) выберем аналогично тому, как это было сделано в [1].

Выражение для интегрального теплового потока (3) в новых переменных примет вид

$$\bar{Q} = \int_0^{\bar{x}_k} \alpha_e\left(1 - \alpha_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{b_0}{\theta_0}\left(-\frac{11}{2}\frac{\omega_0}{\theta_0} + 9\frac{\omega_1}{\theta_1} - \frac{9}{2}\frac{\omega_2}{\theta_2}\right) d\bar{x}.$$

Литература

1. *Дородницын А.А.* Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя// Прикладная математика и техническая физика. – 1960. – N 3. – С. 111–118.

2. *Павловский Ю.Н.* Численный расчет пограничного слоя в сжимаемом газе// Журнал вычислит. математики и матем. физики. – 1962. – N 5. – С. 884–901.

3. *Лю-Шень-Цюань.* Расчет ламинарного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува // Журнал вычислит. математики и матем. физики. – 1962. – N 5. – С. 868–883.

4. *Гараев К.Г.* Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1988. – N 3. – С. 92–100.

5. *Башкин В.А.* Расчет уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя методом интегральных соотношений // Вычислит. математика и мат. физика. – 1968. – Т.8. – N 6. – С. 1280–1290.

6. *Дорренс У.Х.* Гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: Мир, 1966. – 439 с.

7. *Дородницын А.А.* Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе // Сб. теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. – С. 140–173.

О ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЕЙ

Долженко Е.П.
Московский государственный университет

По теореме Каратеодори всякое (однолистное) конформное отображение $w = f(z)$ одной односвязной области G_1 с жордановой границей Γ_1 на другую односвязную область G_2 с жордановой границей Γ_2 продолжается на Γ_1 до гомеоморфизма $\overline{G}_1 = G_1 \cup \Gamma_1$ на $\overline{G}_2 = G_2 \cup \Gamma_2$. Возникает вопрос о количественных связях гладкостных свойств f на $\overline{G}_1$ со свойствами Γ_1 и Γ_2. Для гладких Γ_1 и Γ_2 он решается теоремами Келлога, Варшавского и др. Содержательная оценка модуля непрерывности $\omega(f, \overline{G}_1, \delta)$ функции f на $\overline{G}_1 = \overline{D}$ при $D := \{z : |z| < 1\}$ и любой односвязной жордановой области $G_2 = G$ получена в [1], где "качество" жордановой кривой Γ (не обязательно замкнутой) определяет ее модуль колебания $d(\Gamma; \delta) = \sup\{d(\Gamma; z, t) : z, t \in \Gamma, |z - t| \leq \delta\}$ $(\delta \geq 0)$. Здесь $d(\Gamma; z, t)$ – меньший из диаметров дуг кривой Γ, соединяющих z с t. Положим еще $m(\Gamma; \delta) = \sup\{\mathrm{mes}_1(\Gamma; z, t) : z, t \in \Gamma, |z - t| \leq \delta\}$ $(\delta \geq 0)$ (для спрямляемой Γ), где $\mathrm{mes}_1(\Gamma; z, t)$ – меньшая из длин дуг кривой Γ, соединяющих z с t. Очевидно, функции $m(\Gamma; \delta)$ и $d(\Gamma; \delta)$ обе не убывают, $m(\gamma; \delta) \geq d(\Gamma; \delta) \geq \delta$. Если Γ – замкнутая жорданова кривая, или жорданова дуга с концами, то $d(\Gamma; \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, если же Γ спрямляема, то $d(\Gamma; \delta) \to 0$, $m(\Gamma; \delta) \to 0(\delta \to 0)$. Приведем еще одно обозначение из [1]. Пусть $g(x)$ не убывает при $x \geq 0$, $g(x) \geq x$, $g(0) = g(0+) = 0$, $\overline{g}(x) := g(x) + x$, $h(x) := (\overline{g}(\sqrt{x}))^2$. Функция $H_g(x) = -\int_x^a \frac{dt}{h^{-1}(t)}$ $(a = \mathrm{const} > 0$, например, $a = 1)$ выпукла вверх и строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому $H_g^{-1}(x)$ определена, положительна, выпукла вниз и возрастает на $[-\infty, +\infty]$, $H_g^{-1}(x) \to 0 =: H_g^{-1}(-\infty)$ при $x \to -\infty$, $H_g^{-1}(x) \to +\infty =: H_g^{-1}(+\infty)$ при $x \to +\infty$. Обозначим через $J(g)$ и $J_0(g) \subset J(g)$ семейства всех таких жордановых кривых Γ, что $d(\Gamma, \delta) \leq g(\delta)$ и $m(\Gamma, \delta) \leq g(\delta)$ соответственно $(\forall\delta \geq 0)$.